www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 6 heures

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés d'ensembles remarquables de $\mathbb{R}$ relatives à la convergence des séries trigonométriques. Les parties I et II, consacrées respectivement à la convergence absolue des séries trigonométriques et à l'étude de la classe S des nombres de Pisot, sont indépendantes.

NOTATIONS ET RAPPELS :

1. Si $A \subset \mathbb{R}$, on notera $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de A, indexées par $\mathbb{N}$.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on notera $[x]$ sa partie entière.

3. Un polynôme sera dit unitaire si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

4. On admettra l'inégalité suivante :
   Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant d \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$ est une matrice réelle à d lignes et d colonnes, on a : $$|\det A|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}^2 \right).$$

PRÉLIMINAIRE

k est ici un entier strictement positif fixé.

1. Soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de points de $[0, 1]^k$, et N un entier strictement positif. On notera $(y_{n,j})_{1 \leqslant j \leqslant k}$ les coordonnées de y_n.
   Montrer qu'il existe deux entiers distincts n et m, compris entre 0 et N^k tels que, pour tout entier j compris entre 1 et k :
   $$|y_{n,j} - y_{m,j}| \leqslant \frac{1}{N}.$$

2. On se donne k nombres réels $a_1, \ldots, a_k$, ainsi qu'un entier N strictement positif. Montrer qu'il existe un entier q compris entre 1 et N^k et des entiers $p_1, \ldots, p_k$ tels que pour tout entier j compris entre 1 et k :
   $$|qa_j - p_j| \leqslant \frac{1}{N}.$$
   (On pourra considérer la suite $y_{n,j} = na_j - [na_j]$.)
   En déduire que, pour tout entier M strictement positif, il existe un entier q compris entre M et MN^k tel que, pour tout entier j compris entre 1 et k :
   $$|\sin qa_j| \leqslant \frac{\pi}{N}.$$

Partie I

Dans cette partie on étudie la convergence absolue des séries trigonométriques.

Pour $\alpha = (\alpha_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\rho = (\rho_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, on notera $E(\rho, \alpha)$ l'ensemble des réels x tels que la série de terme général $\rho_n |\cos(nx - \alpha_n)|$ soit convergente.

On dira qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un ensemble de convergence absolue s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\rho = (\rho_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tels que :
$$A \subset E(\rho, \alpha) \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty.$$

QUESTION 1

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\rho = (\rho_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.
On suppose que la suite $(\rho_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante, de limite nulle, et que : $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$.

1. *a.* Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$, montrer que la série de terme général $\rho_n \cos 2nx$ est convergente.

1. *b.* On suppose que : $\forall n \geqslant 0 \quad \alpha_n = 0$. Montrer que : $E(\rho, \alpha) = \varnothing$.

1. *c.* On suppose que : $\forall n \geqslant 0 \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2}$. Montrer que : $E(\rho, \alpha) = \pi\mathbb{Z}$.

1. *d.* Montrer que, si $E(\rho, \alpha)$ est non vide, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$E(\rho, \alpha) = x_0 + \pi\mathbb{Z}.$$

Tournez la page S.V.P.

QUESTION 2

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n \geqslant 0}$ telle que :

$$\forall\, k \geqslant 1 \quad \forall\, n \leqslant k \qquad |\sin(q_k u_n)| \leqslant \frac{\pi}{k^2}.$$

En déduire que toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est un ensemble de convergence absolue.

QUESTION 3

3. *a.* Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\rho = (\rho_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe des réels $a < b$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall\, x \in]a, b[\quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| \leqslant M.$$

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \int_a^b \cos^2(nx - \alpha_n)\, dx \leqslant M(b - a).$$

En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < +\infty.$$

3. *b.* Montrer que tout ensemble de convergence absolue est inclus dans la réunion d'une suite de fermés d'intérieurs vides. Pour la suite *on admettra* que cela implique qu'un ensemble de convergence absolue est d'intérieur vide.

QUESTION 4

Soit $\rho = (\rho_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n = +\infty$.

On note : $R_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k$.

4. *a.* Quelle est la nature des séries de terme général $\dfrac{\rho_n}{R_n}$ et $\dfrac{\rho_n}{R_n^2}$?

4. *b.* Soit $A \subset \mathbb{R}$, on suppose que : $\forall\, x \in A \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\sin(nx)| < +\infty$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une suite d'entiers non nuls $(q_n)_{n \geqslant 0}$ telle que :

$$\forall\, x \in A \cup \{x_0\} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{R_n} |\sin(nq_n x)| < +\infty.$$

4. *c.* Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un ensemble de convergence absolue si et seulement si il existe une suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty$$

et

$$\forall\, x \in A \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n |\sin(nx)| < +\infty.$$

QUESTION 5

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On suppose que tout nombre réel est une combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de A. Montrer que A n'est pas un ensemble de convergence absolue.

Partie II

QUESTION 1

Soit $\theta \in \mathbb{C}$. On dira que θ est un nombre algébrique s'il existe un polynôme non nul P, à coefficients rationnels, tel que $P(\theta) = 0$. On dira que θ est un entier algébrique s'il existe un polynôme P, unitaire et à coefficients entiers, tel que $P(\theta) = 0$.

1. *a.* Montrer que, si θ est un nombre algébrique, il existe un unique polynôme P_θ, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, unitaire, tel que : $P_\theta(\theta) = 0$. Les racines de P_θ sont appelées les conjugués de θ.

1. *b.* Montrer que, si θ est en entier algébrique, P_θ est à coefficients entiers.

Tournez la page S.V.P.

QUESTION 2 Soit S l'ensemble des entiers algébriques θ dont tous les conjugués autres que θ sont de module strictement inférieur à 1.

2. *a.* Soit $\theta \in S$. Montrer que θ est un nombre réel de valeur absolue supérieure ou égale à 1.

2. *b.* Montrer que, si $\theta \in S$, la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ est convergente.

QUESTION 3 Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1 et λ un nombre réel strictement positif. On suppose que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda\theta^n) < +\infty .$$

On pose : $a_n = \left\lfloor \lambda\theta^n + \frac{1}{2} \right\rfloor$ et $\varepsilon_n = \lambda\theta^n - a_n$.

3. *a.* Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On notera $f(z)$ sa somme.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. On notera $g(z)$ sa somme.

Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \Rightarrow |g(z)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{1-|z|}} .$$

3. *b.* On définit la matrice A_n, à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes, par :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe un unique entier p tel que A_p soit inversible et tel que A_n ne soit pas inversible pour $n \geqslant p+1$.

3. *c.* En déduire qu'il existe des nombres rationnels $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ tels que, pour tout entier j :

$$\lambda_0 a_j + \lambda_1 a_{j+1} + \cdots + \lambda_p a_{j+p} + a_{j+p+1} = 0 .$$

3. *d.* Une série entière à coefficients entiers est dite primitive si aucun nombre premier ne divise tous ses coefficients. Montrer que le produit de deux séries entières primitives est une série entière primitive.

3. *e.* En déduire qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $f = \frac{P}{Q}$, et que l'on peut choisir P et Q, premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, à coefficients entiers, et tels que $Q(0) = 1$.

3. *f.* Montrer que Q a une unique racine de module inférieur ou égal à 1. En déduire que $\theta \in S$.

QUESTION 4 Soit ξ un réel strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. On pose $\theta = \frac{1}{\xi}$.

4. *a.* Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la suite :

$$V_n(u) = \prod_{k=0}^{n} \cos(u\xi^k)$$

est convergente. On note $V(u)$ sa limite.

4. *b.* Soient $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels, convergente de limite λ, et $(m_n)_{n \geqslant 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. On pose $u_n = \pi\lambda_n\theta^{m_n}$, et on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \geqslant 0 \quad |V(u_n)| \geqslant \delta .$$

Montrer que : $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda\theta^n) < +\infty$.

4. *c.* Si $\theta \notin S$, montrer que : $\lim_{u \to +\infty} V(u) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

4. *d.* Si $\theta \in S$, montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall k \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant k \qquad |V_n(\pi\theta^k)| \geqslant A \prod_{j=0}^{n-k} \left|\cos\left(\frac{\pi}{\theta^j}\right)\right|.$$

En déduire que $\lim_{u \to +\infty} V(u) = 0$ si et seulement si $\theta \notin S$.

Partie III

Dans toute cette partie ξ désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Si I est un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ on définit :

$$E_\xi^1(I) = [a, a + \xi(b-a)] \cup [b - \xi(b-a), b].$$

Si J est la réunion de N intervalles fermés bornés $(I_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ disjoints deux à deux, on pose :

$$E_\xi^1(J) = \bigcup_{n=1}^{N} E_\xi^1(I_n).$$

Si I est un intervalle fermé borné, on définit par récurrence :

$$E_\xi^k(I) = E_\xi^1(E_\xi^{k-1}(I)) \qquad \text{pour tout entier } k \geqslant 1,$$

puis on pose :

$$E_\xi(I) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_\xi^k(I).$$

QUESTION 1

1. *a.* Montrer que $E_\xi(I)$ est un compact d'intérieur vide.

1. *b.* Montrer qu'un réel x appartient à $E_\xi(I)$ si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres égaux à 0 ou 1 telle que :

$$x = a + (b-a)(1-\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \varepsilon_k.$$

QUESTION 2

2. *a.* Soit un entier $p \geqslant \frac{1}{\xi} - 1$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^p$, orthogonal au vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées dans la base canonique sont égales à 1. On suppose que : $H \cap [0, 1]^p \neq \varnothing$.

Montrer que : $H \cap (E_{1-\rho\xi}^1([0, 1]))^p \neq \varnothing$.

(Un dessin, avec $p = 2$, est souhaitable.)

En déduire que : $H \cap E_\xi([0, 1])^p \neq \varnothing$.

2. *b.* Montrer que : $E_\xi([0, 1])$ n'est pas un ensemble de convergence absolue.

QUESTION 3

3. *a.* Sur l'intervalle $I = [a, b]$ on considère la fonction F_k, continue, nulle en a, croissant linéairement de $\frac{1}{2^k}$ sur chaque intervalle inclus dans $E_\xi^k(I)$, et constante sur chaque intervalle inclus dans le complémentaire de $E_\xi^k(I)$.

Montrer que la suite $(F_k)_{k \geqslant 1}$ converge uniformément vers une fonction croissante que l'on notera F.

3. *b.* Montrer que, si f est une fonction de classe C^1 nulle en a :

$$\lim_{u \to +\infty} u\left(\int_a^b e^{iux} f(x)\,dx - \frac{1}{iu} e^{iub} f(b)\right) = 0.$$

3. *c.* Montrer que :

$$\lim_{u \to +\infty} u\left(\int_a^b e^{iux} F(x)\,dx - \frac{1}{iu} e^{iub} F(b)\right) = 0$$

si et seulement si $\frac{1}{\xi} \notin S$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail